

LOGARITHMISCHE SPIRALBAHN – SYNTHESE AUS QUELL - UND WIRBELSTRÖMUNG

Norbert Harthun

[Originaltext (und Schreibweise) aus:
MuT 1983 Nr. 2 ;Layout etwas geändert]

Es wird das neue Titelbild (Bild 1) dieses Arbeitsblattes zunächst anschaulich erläutert und anschließend im Anhang die Berechnung dazu gebracht. Bei der ebenen Wirbelquelle oder -senke handelt es sich um Idealisierungen, die geeignet sind, manche Naturgegebenheiten näherungsweise zu beschreiben.

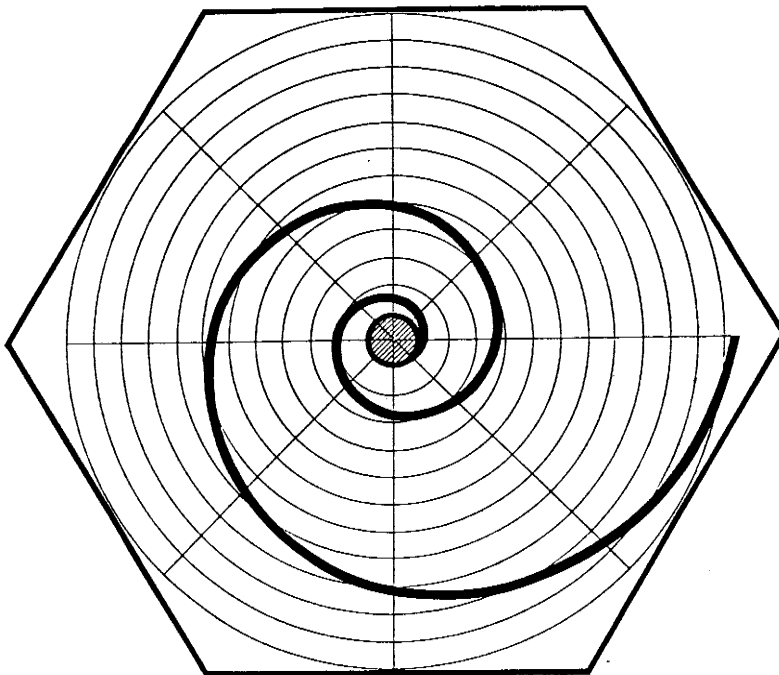
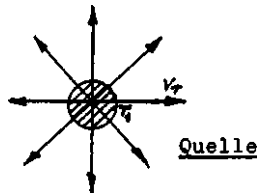


Bild 1 Logarithmische Spiralbahn eines Fluid-Teilchens bei einer ebenen Wirbelquelle

In der Strömungstechnik ist der (idealisierte) Fall der ebenen Wirbelquelle bekannt. Man kann sie sich veranschaulichen, indem man sich ein senkrechttes Rohr vorstellt, aus dem ein Fluid nach unten ausströmt, und dessen Öffnung sich sehr dicht vor einer ebenen Platte befindet (Bild 2). Das Fluid fließt auf der Platte in einem dünnen Film nach allen Richtungen fort (ebene Quelle). Dabei nimmt die Geschwindigkeit der Fluid-Teilchen nach außen ab. Der Zusammenhang zwischen Abstand r und Geschwindigkeit v_r ist hyperbolisch!

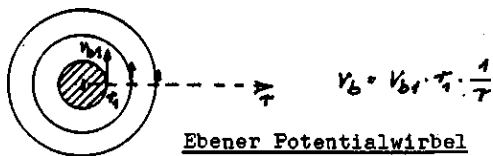


$$v_r = v_{r1} \cdot r_1 \frac{1}{r}$$

v_r = Radialgeschwindigkeit; r_1 = Rohrradius; v_{r1} = Austrittsgeschwindigkeit

Bild 2 Ebene Quelle

Außerdem soll sich das Rohr um seine Längsachse drehen. Diese Rotation teilt sich dem Fluid mit und hat am Austrittsort (Kern r_{r1}) die maximale Umfangsgeschwindigkeit (Bahngeschwindigkeit v_{b1}), die mit wachsender Entfernung von der Quelle ebenfalls hyperbolisch abnimmt. Dabei handelt es sich um einen Potentialwirbel (Bild 3).



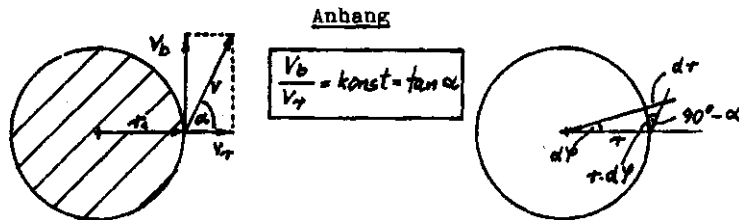
v_b = Bahngeschwindigkeit; v_{b1} = Bahngeschwindigkeit des Rohrumfanges

Bild 3 Ebener Potentialwirbel

Die Richtungen beider Geschwindigkeiten stehen senkrecht (90°) aufeinander und damit auch die Bahnen der Fluid-Teilchen, wenn Quelle und Wirbel getrennt betrachtet werden könnten. Die Kombination beider führt den Namen "Wirbelquelle", und die Bahnform der Fluid-Teilchen ist eine ebene logarithmische Spirale, wie sie sich in der Natur in unzähligen Beispielen kundtut. Es handelt sich dabei um eine Kurve, die alle vom Koordinatenursprung ausgehenden Strahlen unter dem gleichen Winkel schneidet. Hat man anstelle der Quelle eine Senke (Abfluss), so beschreiben die Teilchen logarithmisch einlaufende Bahnen. Aus zwei senkrecht aufeinanderstehenden Strömungen mit hyperbolischen Gesetzmäßigkeiten zwischen Weg und Geschwindigkeit ergeben sich logarithmische Teilchenbahnen; so "entsteht" aus Kreis und Gerade die logarithmische Spirale!

Anhang

In [1] wird als Beweis folgender Zusammenhang aufgeführt:



$$\operatorname{tg}(90^\circ - \alpha) = \frac{dr}{rd\varphi} = \operatorname{ctg}\alpha = \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha} = \frac{v_r}{v_{b1}}$$

$$\frac{dr}{rd\varphi} = \frac{v_r}{v_{b1}}$$

$$\frac{dr}{r} = \frac{v_r}{v_{b1}} d\varphi$$

$$\int \frac{dr}{r} = \frac{v_r}{v_{b1}} \int d\varphi$$

$$\ln r + k = \frac{v_r}{v_{b1}} \cdot \varphi$$

An der Stelle $\varphi = 0$ ist $r = r_1$:

$$\ln r_1 + k = 0$$

$$k = -\ln r_1$$

Damit folgt:

$$\ln r - \ln r_1 = \frac{v_{r1}}{v_{b1}} \cdot \varphi$$

$$\ln \frac{r}{r_1} = \frac{v_r}{v_{b1}} \cdot \varphi \quad \Rightarrow \quad \frac{r}{r_1} = e^{\frac{v_{r1} \cdot \varphi}{v_{b1}}}$$

Die Strömung besteht aus derartigen Spiralen, die bei einer Wirbelquelle nach außen laufen, bei einer Wirbelsenke nach innen.

[1] Bruno Eck; Technische Strömungslehre, 3. Aufl. Springer Verl. Berlin, Göttingen Heidelberg 1949