DIE KENNWERTE DER HARMONIKALEN EIKURVE

Norbert Harthun

Schnitte am hyperbolischen Kegel ergeben, wenn die Schnittwinkel größer als Null und kleiner als Neunzig Grad sind, Eikurven. Während auf die Gleichung dieser Schnittkurve hier verzichtet wird, kommen die Haupt- und Nebenscheitel, sowie die Achsen zur Sprache.

Die Schnittlinie einer Ebene mit dem hyperbolischen Kegel $z = \frac{1}{x}$, der als Modelldarstellung des Tongesetzes (1) kurz „Tonkegel" genannt wird, (Vorschlag von W. SCHAUBERGER) besitzt die Ei-Form, die leicht punktweise konstruiert werden kann (2); der offene Kurventeil, der beim allgemeinen Fall, beginnend bei P_0', auftritt, sei hier nicht weiter behandelt (Bild 1).

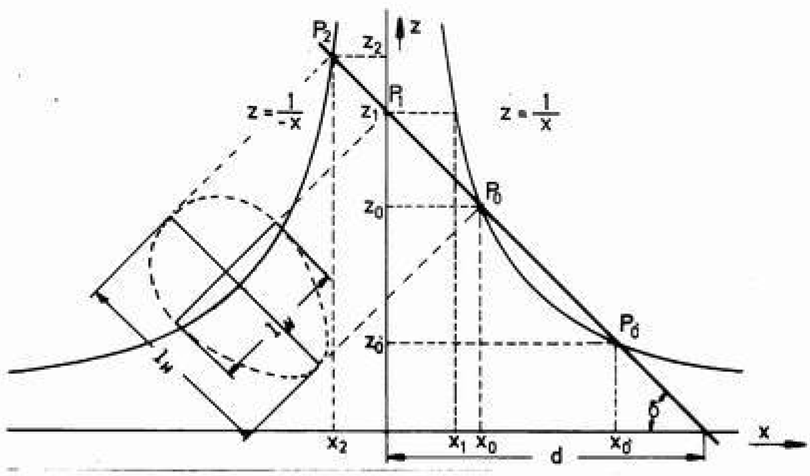

Bild 1 Schnitt des Tonkegels $z = \frac{1}{|x|}$ durch eine Ebene (allgemein)

Wir interessieren uns hier für die Berechnung einiger Kennwerte dieser Ei-Kurve. Es handelt sich dabei um folgende Größen (Bild 1):

Hauptachse (l_H)
Nebenachse (l_N)
Spitzer Hauptscheitel (P_0)
Flacher Hauptscheitel (P_2)
Nebenscheitel (P_1)

Alle diese Werte hängen vom Schnittwinkel δ der Ebene mit der x-Achse und der Entfernung d ab, in der die Ebene die x-Achse schneidet. Mit Hilfe trigonometrischer Beziehungen ergibt sich der Zusammenhang zwischen der Länge der Hauptachse l_H und dem Schnittwinkel δ . (x_2 ist entsprechend Bild 1 vorzeichenrichtig, also mit negativem Wert in alle Formeln einzusetzen!)

(1) $$\boxed{l_H = \frac{x_0 - x_2}{\cos\delta}}$$

Außerdem gilt:

(2) $$z_2 - z_0 = (x_0 - x_2)\tan\delta$$

(3) $$x_0 - x_2 = \frac{z_2 - z_0}{\tan\delta}$$

Gleichung (3) in (1) eingesetzt:

(4) $$\boxed{l_H = \frac{z_2 - z_0}{\sin\delta}}$$

Die Nebenachse hat eine Länge von $l_N = 2x_1$, wie aus der Konstruktionszeichnung der Eikurve entnommen werden kann (2).

$$z_1 - z_0 = x_0 \tan\delta$$

$$z_1 = x_0 \tan\delta + z_0; \qquad z_1 = \frac{1}{x_1}$$

$$\frac{1}{x_1} = \frac{x_0^2 \tan\delta + 1}{x_0},$$

(5) $$\boxed{x_1 = \frac{x_0}{x_0^2 \tan\delta + 1}}$$

(6) $$\boxed{l_N = 2x_1 = \frac{2x_0}{x_0^2 \tan\delta + 1}}$$

Weiter sei die Lage des spitzen Hauptscheitels (P_0) gesucht:

(7) $$\tan\delta = \frac{z_0}{d - x_0} = \frac{\frac{1}{x_0}}{d - x_0} = \frac{1}{x_0(d-x_0)} = \frac{1}{dx_0 - x_0^2}$$

$$- dx_0 + x_0^2 = \frac{-1}{\tan\delta}$$

$$x_0^2 - dx_0 + \left(\frac{d}{2}\right)^2 = \left(\frac{d}{2}\right)^2 - \frac{1}{\tan\delta}$$

$$(x_0 - \tfrac{d}{2})^2 = \left(\tfrac{d}{2}\right)^2 - \frac{1}{\tan\delta}$$

(8) $$\boxed{\begin{aligned} x_0 &= \frac{d}{2} - \sqrt{\frac{d^2}{4} - \frac{1}{\tan\delta}} \\ x_0' &= \frac{d}{2} + \sqrt{s.o.} \end{aligned}}$$

Dieser aufwendige Ausdruck braucht häufig nicht benutzt zu werden, da man sich oft beide Scheitelpunkte, durch die die Ebene gehen soll, willkürlich vorgibt und daran mit Gl. (3) den Schnittwinkel δ für die anderen Ausdrücke berechnet:

Aus Gl.(3) und (7): $\delta = \arctan \dfrac{Z_2 - Z_0}{x_0 - x_2}$ (9) oder: $\delta = \arctan \dfrac{Z_0}{d - x_0}$.

Sind die Nebenscheitel und nur jeweils ein Hauptscheitel bekannt, so gilt entsprechend:

$$\delta = \arctan \frac{Z_1 - Z_0}{x_0} \quad \text{oder:} \quad \delta = \arctan \frac{Z_2 - Z_1}{-x_2};$$

(10) bzw.: $\delta = \arctan Z_0(Z_1 - Z_0)$; $\delta = \arctan Z_2(Z_2 - Z_1)$.

Als nächste Größe ist die Lage des flachen Hauptscheitels (P_2) von Interesse. Es gilt laut Gl.(9):

$$Z_2 - Z_0 = (x_0 - x_2)\tan\delta\ .$$

$$Z_2 + x_2\tan\delta = Z_0 + x_o\tan\delta\ ; \quad Z_2 = \frac{1}{-x_2}\ ; \quad Z_0 = \frac{1}{x_0}$$

$$\frac{1}{-x_2} + x_2\tan\delta = \frac{1}{x_0} + x_0\tan\delta\ .$$

Die weitere Auflösung ergibt den sehr aufwendigen Ausdruck:

$$x_2 = \frac{1}{2}\left(x_0 + \frac{1}{x_0\tan\delta}\right) (\mp) \sqrt{\frac{1}{\tan\delta} + \left[\frac{1}{2}\left(x_0 + \frac{1}{x_0\tan\delta}\right)\right]^2}$$

Mit Gl.(5) folgt jedoch:

$$(11)\quad \boxed{x_2 = \frac{1}{2x_1 \tan\delta} \;(\mp)\sqrt{\frac{1}{\tan\delta} + \left(\frac{1}{2x_1 \tan\delta}\right)^2}}$$

Als Kurzausdruck zur Charakterisierung der Eiform werde das Verhältnis k_s, der „Schlankheitsgrad", eingeführt:

$$k_s = \frac{l_H}{l_N};\; k_s \geq 1 \;.$$

Er ist stets gleich oder größer als Eins. Für den Wert Eins ergibt sich ein Kreis, Schnittwinkel δ ist Null und die Scheitelpunkte haben alle die gleichen x bzw. z-Koordinatenbeträge. Mit schmaler werdender Eiform, d.h. steigendem δ wird der Wert k_s des Schlankheitsgrades sinngemäß größer. Mit Gl. (1) und (6):

$$(12)\quad k_s = \frac{l_H}{l_N} = \frac{x_0 - x_2}{\cos\delta} \cdot \frac{x_0^2 \tan\delta + 1}{2x_0} \;.$$

Gl.(5) in (12) eingesetzt, ergibt einen übersichtlicheren Ausdruck:

$$(13)\quad \boxed{k_s = \frac{x_0 - x_2}{2x_1 \cos\delta}} \;.$$

Gl.(9) in (13) führt zu einer analogen Beziehung:

$$(14)\quad \boxed{k_s = \frac{z_1(z_2 - z_0)}{2\sin\delta}} \;.$$

Mindestens eine evtl. wichtige Größe wird hier nicht behandelt: die breiteste Stelle der Eikurve. Aus (2) ist bekannt, daß sie nicht mit der Nebenachse zusammenfällt. Ihre Ermittlung ist schwierig.

Anhang:

Darstellung einer Funktion durch eine andere Funktion desselben Winkels(3):

$$\sin\alpha = \sqrt{1-\cos^2\alpha} = \frac{\operatorname{tg}\alpha}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}} = \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{ctg}^2\alpha}} = \frac{\sqrt{\operatorname{sc}^2\alpha-1}}{\operatorname{sc}\alpha} = \frac{1}{\csc\alpha},$$

$$\cos\alpha = \sqrt{1-\sin^2\alpha} = \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}} = \frac{\operatorname{ctg}\alpha}{\sqrt{1+\operatorname{ctg}^2\alpha}} = \frac{1}{\operatorname{sc}\alpha} = \frac{\sqrt{\csc^2\alpha-1}}{\csc\alpha},$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\sqrt{1-\sin^2\alpha}} = \frac{\sqrt{1-\cos^2\alpha}}{\cos\alpha} = \frac{1}{\operatorname{ctg}\alpha} = \sqrt{\operatorname{sc}^2\alpha-1} = \frac{1}{\sqrt{\csc^2\alpha-1}},$$

$$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{\sqrt{1-\sin^2\alpha}}{\sin\alpha} = \frac{\cos\alpha}{\sqrt{1-\cos^2\alpha}} = \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha} = \frac{1}{\sqrt{\operatorname{sc}^2\alpha-1}} = \sqrt{\csc^2\alpha-1}.$$

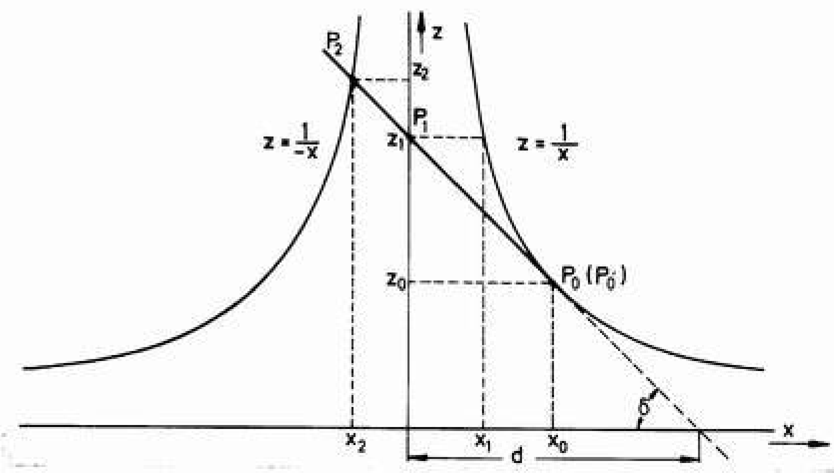

Bild 2 Schnitt des Tonkegels $z = \frac{1}{|x|}$ für den Sonderfall: $\delta = 45^\circ$; $d = 2$; $(x_0 = x_0' = 1)$.

Im Anschluß an den allgemeinen Teil seien einige Beispiele vorgerechnet:

1) Gegeben:
Der Tonkegel werde durch eine Ebene geschnitten, die den Scheitelpunkt der Tonkurve (= gleichseitige Hyperbel in Asymptotenform) berührt, d.h. ihr Seitenriß ist dort Tangente. Es sind also: $x_0 = 1$ und $\delta = 45^\circ$ (Bild 2).

Gesucht: Kennwerte der Eikurve (x_1; x_2; l_H; l_N; k_s)!

Ergebnisse:

Aus Gl.(5): $x_1 = \frac{1}{2}$

Aus Gl.(11): $x_2 = 1 - \sqrt{2}$

Aus Gl.(1): $l_H = 2$; denn: $\cos 45^\circ = \frac{1}{2}\sqrt{2}$

Aus Gl.(6): $l_N = 1$

Dann folgt: $k_s = 2$

2) Gegeben: $P_0(x_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}\,;\ z_0 = \sqrt{2})$; $\tan\delta = 2$

Gesucht: Kennwerte (x_1, x_2, l_H, l_N, k_s)

Aus Gl.(5): $x_1 = \frac{1}{2\sqrt{2}}$

Aus Gl.(11): $x_2 = \frac{1}{2}\sqrt{2} - 1$

Aus Anhang: $\cos\delta = \frac{1}{\sqrt{5}}$

Aus Gl.(1): $l_H = \sqrt{5}$

Aus Gl.(6): $l_N = \frac{1}{2}\sqrt{2}$

Dann folgt: $k_s = \sqrt{10}$

3) <u>Gegeben</u>:

Eine Schnittebene schneide den Tonkegel in den Punkten $P_0(x_0 = 1;\ z_0 = 1)$ und $P_2(x_2 = -\frac{1}{2};\ z_2 = 2)$.

<u>Gesucht</u>: Schnittwinkel und die fehlenden Kennwerte der Eikurve (δ ; x_1; l_H; l_N; k_s)!

<u>Ergebnisse</u>:

Aus Gl.(9): $\tan\delta = \frac{2}{3}$, daraus folgt: $\delta = \arctan\frac{2}{3}$

Aus Gl.(5): $x_1 = \frac{3}{5}$

Aus Anhang: $\cos\delta = \frac{3}{\sqrt{13}}$

Aus Gl.(1): $l_H = \frac{1}{2}\sqrt{13}$

Aus Gl.(6): $l_N = \frac{6}{5}$

Dann folgt: $k_s = \frac{5}{12}\sqrt{13}$

(1) SCHAUBERGER, Walter
Das Einrollende System
Bild d. k. Evol. 1969; H.1; S. 4ff

(2) WÖHLKE, Gerhard
Die Konstruktion der Eikurve
Kosmische Evolution 1972, H.3, S.114

(3) BRONSTEIN - SEMENDJAJEW
Taschenbuch d. Mathematik, S. 156
Verl. Harri Deutsch; 7. Aufl.