ZAHLEN UND TÖNE

Uwe Fischer

[Originaltext; 2006 ‚gescannt' aus „Bild der kosmischen Evolution";
1971; H. 1; S. 36-45. Leicht überarbeitet; u.a. Layout etwas geändert.]

Es wird gezeigt, wie durch systematisches Vorgehen bei der Unterteilung von schwingenden Saiten in ganzzahlige Bruchteile Töne erklingen, die je nach dem angewandten Prinzip der Teilung Tonsystemen wie Dur, Moll oder anderen angehören. Dabei stützt sich der Verfasser in seinen Ausführungen im Wesentlichen auf das in diesem Zusammenhang sehr empfehlenswerte Buch von Rudolf HAASE: "Die Grundlagen der harmonikalen Symbolik" (l).

NUMBERS AND NOTES

It is shown how by systematic subdivision of oscillating strings into even fractions, notes will be generated which depending on the System of subdivision used will be major key, minor key or others.

Ein Musikinstrument wie das Klavier ist gekennzeichnet durch seine symmetrisch angeordnete Tastatur (2). „Weiße" und "schwarze" Tasten wechseln einander in einer wiederkehrenden Reihenfolge ab. Zwischen zwei Tasten mit gleicher Tonbezeichnung finden wir elf Tasten angeordnet. Der Schritt von einer Taste zur Nachbartaste wird Halbtonschritt genannt. Zwölf Halbtonschritte ergeben eine Oktave. Die Oktave eines beliebigen Tones ist definiert als der Ton mit der doppelten oder der halben Schwingungszahl (Frequenz) des Grundtones, Hier soll nun gezeigt werden, nach welcher Gesetzmäßigkeit die elf Töne innerhalb einer Oktave in diese eingeordnet sind. Um an diese Aufgabe heranzugehen, erinnern wir uns zunächst an das Tongesetz, das die Abhängigkeit der Tonhöhe (Frequenz) von der Länge einer schwingenden Saite beschreibt (3):

Frequenz . Saitenlänge = konstant

$$f \cdot l = \text{konst.}$$

Denken wir uns nun eine gespannte Saite der Länge l, die beispielsweise auf den Ton C abgestimmt ist, so müssen wir die Saitenlänge halbieren, um die doppelte Frequenz, d.h. die Oktave des Grundtones C, zu hören. Welche Bruchteile der ganzen Saite lassen nun die Zwischentöne zwischen Oktave und Grundton erklingen? Im Prinzip könnte man innerhalb einer Oktave beliebig viele verschiedene Töne einfügen. Das menschliche Gehör würde höchstens die Anzahl der Zwischentöne nach oben dadurch begrenzen, daß es eine Unterscheidung benachbarter Töne nicht mehr zuläßt. Wie schon erwähnt, ist der Halbtonschritt das kleinste in der Musik gebräuchliche Intervall und wird "kleine Sekunde" genannt (Intervall = Zwischenraum zwischen zwei Tönen). Das Intervall "kleine Sekunde" hört man, wenn nacheinander erst der fünfzehnte und dann der sechzehnte Teil einer Saite zum Klingen gebracht wird. Dieser Sachverhalt ist aber schon ein Ergebnis der Untersuchungen, die erst im folgenden experimentell an einem erweiterten Monochord vorgenommen werden sollen. Ein Monochord (Bild 1) ist ein in der Antike benutztes Musikinstrument, an dem in hervorragender Weise das Gesetz der Harmonie demonstriert werden kann (3).

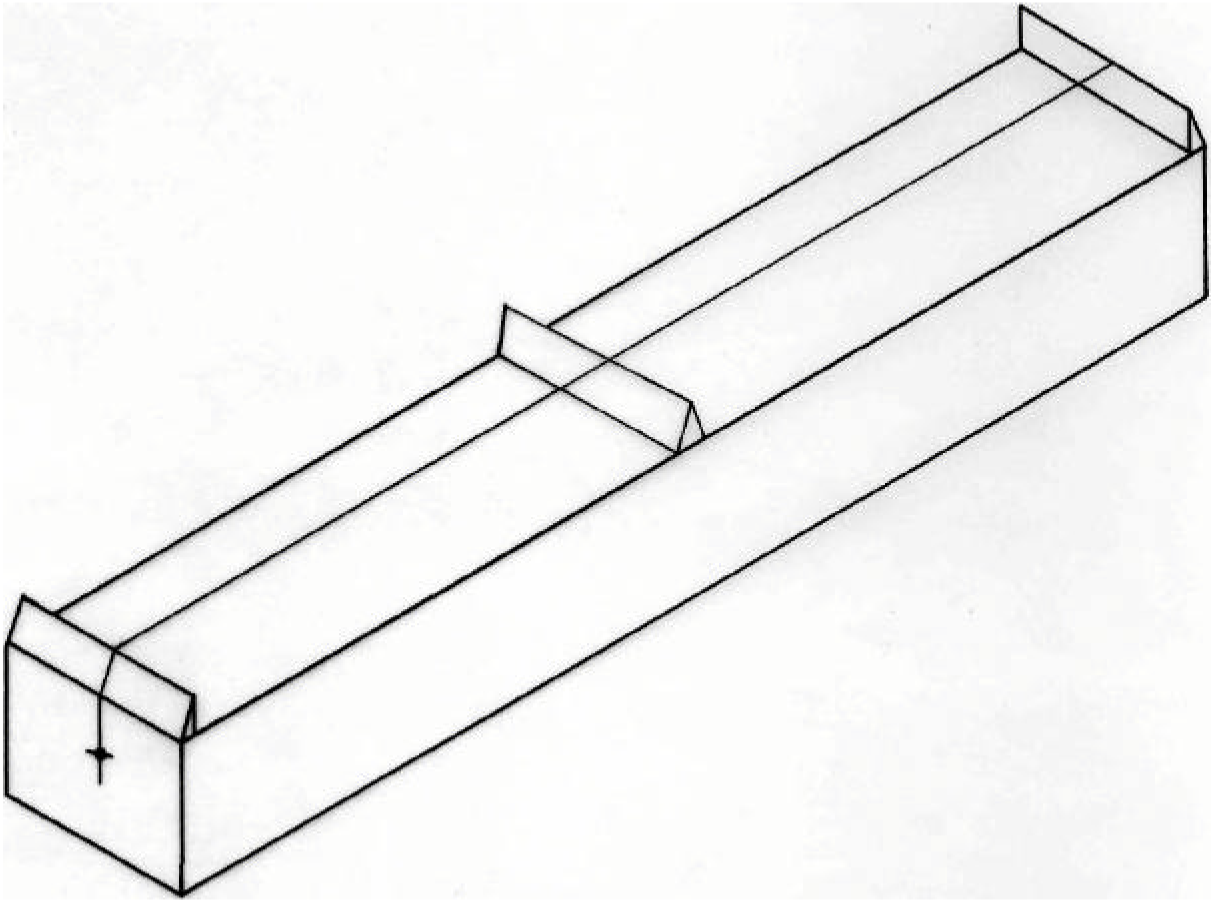

Bild 1

Für unsere Experimente wählen wir ein sechzehnsaitiges Instrument, weil wie o. a. der Tonschritt vom 15. zum 16. Teilton das kleinste gebräuchliche Intervall ergibt und sich mit einem solchen Monochord alle in diesem Rahmen interessierenden Tonphänomene demonstrieren lassen. Alle sechzehn Saiten werden auf den gleichen Grundton abgestimmt. Als Grundton wählen wir willkürlich C. Wir gehen nun so vor, daß wir die Stege unter den einzelnen Saiten derart setzen, daß wir nacheinander verschiedene Bruchteile der ganzen Saitenlänge anzupfen können.

Da in den Beiträgen dieser Schriftenreihe immer wieder auf die Bedeutung der in der Mathematik als harmonische Reihe bezeichneten Zahlenfolge 1, 1/2, 1/3...1/n hingewiesen wird, wollen wir die Stege so setzen, daß wir zuerst die ganze Saite, dann deren Hälfte, Drittel, Viertel, u. s. w. bis hin zum Sechzehntel anzupfen und uns die jeweils zu einem Saitenteil erklingenden Töne anhören können.

Wir werden dabei im Verlaufe dieser Untersuchungen die verschiedensten Intervalle hören. Deshalb sei die Definition der Intervallbezeichnungen bis hin zur Oktave in einer Tabelle erläutert:

Intervallbezeichnung	Grundton+Anzahl der Teiltonschritte	
Prime	Grundton	
kleine Sekunde	Grundton	+ 1 Halbton
große Sekunde	Grundton + 1 Ganzton	
kleine Terz	Grundton + 1 Ganzton	+ 1 Halbton
große Terz	Grundton + 2 Ganztöne	
Quarte	Grundton + 2 Ganztöne	+ 1 Halbton
Tritonus Übermäßige Quarte verminderte Quinte	Grundton + 3 Ganztöne	
Quinte	Grundton + 3 Ganztöne	+ 1 Halbton
kleine Sexte	Grundton + 3 Ganztöne	+ 2 Halbtöne
große Sexte	Grundton + 4 Ganztöne	+ 1 Halbton
kleine Septime	Grundton + 4 Ganztöne	+ 2 Halbtöne
große Septime	Grundton + 5 Ganztöne	+ 1 Halbton
Oktave	Grundton + 5 Ganztöne	+ 2 Halbtöne

Tabelle 1

Da unsere Untersuchungen willkürlich auf dem Ton G aufgebaut werden, zeigt Bild 2 die Intervallbezeichnungen an einem Ausschnitt aus der Tastatur des Klaviers.

Wenden wir uns nun wieder dem Monochord zu und hören die Töne, die beim Anzupfen der sechzehn verschiedenen langen Teilsaiten erklingen. Wir erkennen die in der nachstehenden Tabelle aufgeführten Intervalle mit ihren Tonbezeichnungen:

Saitenlänge	Intervall	Tonbezeichnung
1	Prime (Grundton)	C
1/2	Oktave von C	c
1/3	Quinte von c	g
1/4	Quarte von g oder Oktave von c	c'
1/5	gr.Terz von c'	e'
1/6	kl.Terz von e'	g'
1/7	in der Musik nicht gebräulicher Ton	
1/8	Oktave von c'	c''
1/9	gr. Sekunde von c"	d"
1/1o	gr. Sekunde von d" Oktave von e'	e"
1/11	in der Musik nicht gebräuchlicher Ton	
1/12	Oktave von g'	g"
1/13	in der Musik nicht gebräuchlicher Ton	
1/14	in der Musik nicht gebräuchlicher Ton	
1/15	gr. Septime von c"	h"
1/16	Oktave von c"	c"'

Tabelle 2

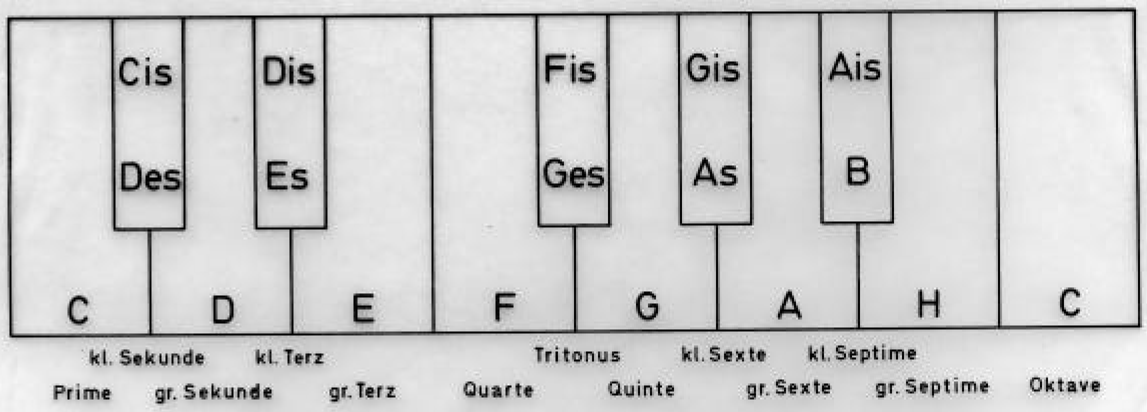

Bild 2

Dabei nehmen wir zur Kenntnis, daß bei den Saitenlängen 1/7, 1/11, 1/13 und 1/14 Töne erklingen, die unserem Ohr in Bezug auf den Grundton fremd erscheinen. Sie stellen tatsächlich in der Musik nicht gebräuchliche Intervalle dar. Aber noch ganz andere, für unsere Betrachtungen sehr wichtige Zusammenhänge können wir aus der Tabelle entnehmen. Wir können z.B. feststellen, daß sämtliche in der rechten Spalte aufgeführten Töne der C-Dur-

Tonleiter angehören, d.h. eine ganz bestimmte zahlenmäßige Operation (harmonische Saitenteilung) bringt uns Töne, die alle einem bestimmten Tonsystem angehören (Dur-System).

Als nächsten Versuch wollen wir von dem Ton c“ ausgehen und uns nacheinander die Töne anhören, die beim Anzupfen von 1/16, 2/16, 3/16 u. s. w. bis zu 16/16 der Saitenlänge erklingen. Das Ergebnis ist wieder in einer Tabelle übersichtlich geordnet, und zwar so, daß die Töne vom tiefsten bis zum höchsten steigen, wie bereits in der ersten Tabelle verfahren

Saitenlänge	Intervall	Tonbezeichnung
1 =16/16	Prime (Grundton)	C
15/16	kl. Sekunde von C	Des
7/8 =14/16	in der Musik nicht gebräuchlicher Ton	
13/16	in der Musik nicht gebräuchlicher Ton	
3/4 =12/16	Quarte von C	F
11/16	in der Musik nicht gebräuchlicher Ton	
5/8 =1o/16	kl. Sexte von C	As
9/16	kl. Septime von C	B
1/2 = 8/16	Oktave von C	c
7/16	in der Musik nicht gebräuchlicher Ton	
3/8 = 6/16	Oktave von F	f
5/16	Oktave von As	as
1/4 = 4/16	Oktave von c	c'
3/16	Oktave von f	f'
1/8 = 2/16	Oktave von c'	c"
1/16	Oktave von c"	c"'

Tabelle 3

wurde. Dadurch ist ein Vergleich beider Versuchsergebnisse besser möglich.
Die Interpretation der jetzt erhaltenen Tabelle zeigt, daß sämtliche in der rechten Spalte aufgeführten Töne der F-Moll-Tonleiter angehören. Wie man sieht, hat wiederum eine ganz bestimmte zahlenmäßige Operation (lineare Saitenteilung) zu Tönen geführt, die alle einem besonderen Tonsystem angehören (Moll-System).

Dieser Sachverhalt ist aber nicht der einzige, den wir aus den Tabellen herauslesen können, Vielmehr offenbaren sie uns interessante Gesetzmäßigkeiten, die für die Bestimmung der den Intervallen zugeordneten Seitenlangen herangezogen werden können. In der Tabelle 2 wurde bei der Saitenlänge 1/4 der Ton c’ als Quarte vom Ton g mit der Saitenlänge 1/3 gefunden. In der Tabelle 3 wurde bei der Saitenlänge 3/4 der Ton F als Quarte vom Ton C mit der Saitenlänge 1 gefunden. Wir stellen fest, daß eine Division der Saitenlänge der Quarte durch die Saitenlänge des zugehörigen Grundtones in beiden Fällen den gleichen Bruch ergibt, der den Saitenbruchteil angibt, der, bezogen auf die ganze Saite, immer eine Quarte erklingen läßt.

Diesen 'Formalismus wollen wir jetzt auch auf andere Intervalle anwenden. Zunächst vereinigen wir noch wegen besserer Übersichtlichkeit die Tabellen 2 und 3 zur Tabelle 4a und transponieren gleichzeitig durch Oktavbildung nach unten (Verdoppelung der Seitenlängen) alle bisher gefundenen Töne in der Große Oktave von C bis c.

Saitenlänge	Intervall	Tonbezeichnung
1	Prime	C
15/16	kl. Sekunde	Des
8/9	gr. Sekunde	D
4/5	gr . Terz	E
3/4	Quarte	F
2/3	Quinte	G
5/8	kl. Sexte	As
9/16	kl. Septime	B
8/15	gr . Septime	H
1/2	Oktave	c

Tabelle 4a

Vergleichen wir Tabelle 4a mit Tabelle 1, so stellen wir fest, daß uns innerhalb einer Oktave noch die Saitenlängen für die Intervalle kl. Terz, Tritonus und gr. Sexte mit den zugehörigen Tönen Es, Ges und A fehlen. Um diese zu finden, stellen wir mit Hilfe von Bild 2 fest, daß das Intervall kl. Terz auch von E nach G besteht. Die Anwendung des Formalismus "Verhältnisbildung" liefert uns die zur kl. Terz gehörende Saitenlänge: 2/3:4/5=5/6.

Für das Intervall Tritonus, das von F nach H existiert, folgt entsprechend für die Saitenlänge: 8/15**:**3/4 = 32/45. Die gr. Sexte finden wir von D nach H. Die Rechnung für die Saitenlänge ergibt:8/15**:**8/9 = 3/5. Damit sind alle zwölf gebräuchlichen Töne innerhalb einer Oktave mit ihren zugehörigen Saitenlängen gefunden. Wir kennen diese Tonfolge in der Musik als 'chromatische Tonleiter'.

Saitenlänge	Intervall	Tonbezeichnung
5/6	kl. Terz	Es
32/45	Tritonus	Ges
3/5	gr. Sexte	A

Tabelle 4b

Mancher wird sich gerade bei der Bestimmung der letzten drei Saitenlängen gefragt haben, warum gerade jene Saitenverhältnisse gebildet wurden und nicht andere. In der Tat berechtigt nichts dazu, die kl. Terz nur zwischen E und G zu suchen. Auch F bildet mit D eine kl. Terz.

Die Verhältnisbildung ergibt allerdings: 3/4**:**8/9 = 27/32, d.h. gegenüber 5/6 eine um 1/96 längere Saite. Wir haben damit ein Problem angeschnitten, das in dem Augenblick gelöst werden mußte, als die Menschen darangingen, Musikinstrumente mit fester Stimmung zu bauen, zu denen z.B. auch das Klavier gehört. Im Prinzip kann jeder Ton der oben gefundenen chromatischen Tonleiter Grundton für eine andere Tonleiter sein; denn unsere Wahl für den Grundton G erfolgte ja willkürlich. Daher wollen wir jetzt der Reihe nach jeden der bisher gefundenen Töne als Grundton wählen, um zu sehen welche Folgen sich z.B. für das Dur-System ergeben. Das Bild 3 zeigt zwölf verschieden lange Saiten. Wenn wir die erste Saitenlänge 1 nennen, so sind die folgenden entsprechend der in Tabelle 4a und 4b gefundenen Saitenlängen gewählt. Damit sind alle zwölf Töne der chromatischen Tonleiter Grundton geworden. Auf diesen Grundtönen werden jetzt durch Saitenteilung wiederum chromatische Tonleitern aufgebaut. Von jeder der zwölf Saiten werden die Saitenteile 15/16, 8/9, 5/6, 4/5, 3/4, 32/45, 2/3, 5/8, 3/5, 9/16, 8/15 und 1/2 gebildet. Die hervorgehobenen Teilungsstriche kennzeichnen die Töne, die der jeweiligen Dur-Tonleiter angehören. Dadurch zeigt sich anschaulich das oben angedeutete Problem. Die C-Dur-Tonleiter besteht z.B. aus

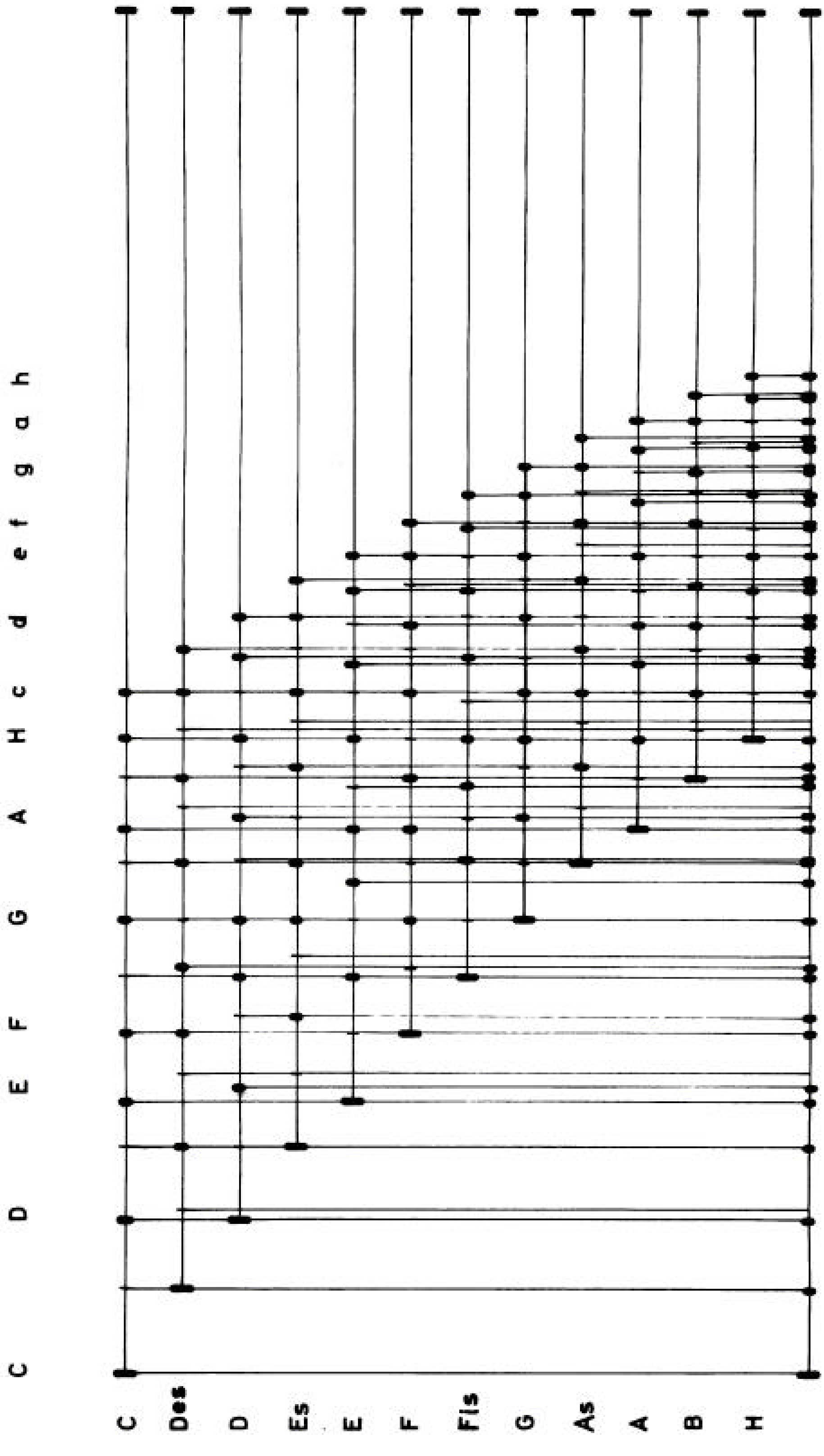

Bild 3

den Tönen G D E F G A H c, die D-Dur-Tonleiter aus den Tönen D E Fis G A H cis d. Ein Vergleich der beiden Tonleitern zeigt, daß fünf Töne mit gleichem Namen beiden gemeinsam sind. Bild 3 zeigt aber deutlich, daß nur D, G und H wirklich die gleichen Töne sind, d.h. exakt gleiche Saitenlängen und damit gleiche Frequenzen haben. Für die Töne E und A ergeben sich in beiden Tonleitern leicht unterschiedliche Saitenlängen zugeordnet. Die zahlenmäßige Auswertung des Bildes 3 ist in der Tabelle 5 festgehalten; dabei sind die Saitenlängen der kleinen Oktave der Übersichtlichkeit wegen in die große Oktave transportiert. Für jeden auf der Klaviatur bezeichneten Ton gibt es mehrere Saitenlängen. Auf einem Saiteninstrument wie z.B. der Geige können durch entsprechende Fingersetzung (Saitenteilung) jeweils die zu der gespielten Tonart gehörenden Töne exakt gespielt werden. Das Gis in E-Dur kann z.B. etwas niedriger gegriffen werden als das As in Es-Dur. Auf dem Klavier ist das nicht möglich, denn für Gis und As gibt es nur eine Taste. Die entsprechenden Erläuterungen, die zu diesem Problem z.B. im Deutschen Museum in München zu finden sind, schließen: "Es werden die durchaus hörbar verschiedenen Zwischentöne geeignet zusammengelegt. Daraus ergibt sich die chromatische Tonleiter mit 'temperierter Stimmung’ (Michael Stiefel 1455). Die Zusammenlegung kann auf verschiedene Weise durchgeführt werden. Heute benutzt man die 'gleichschwebende Temperatur', d. h. das Verhältnis der Frequenzen zweier aufeinander folgender Töne der chromatischen Tonleiter wird gleich groß gemacht (Andreas Werkmeister 1700)."

Ein solches Vorgehen hat natürlich zur Folge, daß die Intervallbezeichnungen keine absoluten Saiten- bzw. Frequenzverhältnisse mehr darstellen. So kann z.B. der G-Dur-Dreiklang C, E, G durch die Saitenlängen 1, 4/5, 2/3 gekennzeichnet sein, für den E-Dur -Dreiklang E, Gis, H finden wir die Saitenlängen 4/5, 5/8, 8/15 bzw. 1, 25/32, 2/3, d.h. das Terzintervall ist in den beiden Dreiklängen nicht gleich groß. Diesen Unterschied nehmen die meisten Menschen zwar nicht bewußt wahr, aber dennoch scheint er auf unser Gefühl zu wirken. Man kann sagen, die verschiedenen Tonarten haben unterschiedlichen Charakter, d.h. selbst die Dur-Tonarten untereinander unterscheiden sich nicht nur durch den jeweils anderen Grundton, sondern lösen durch die unterschiedlichen Intervallverschiebungen in uns Gefühle wie Trauer, Wehmut, Fröhlichkeit oder Triumph aus. Komponisten nutzen diese Effekte dadurch aus, daß sie z.B. für die Komposition eines Trauer- oder eines Triumphmarsches die dazu passende Tonart wählen.

C	1/1	15/16	8/9	5/6	4/5	3/4	32/45	2/3	5/8	3/5	9/16	8/15	1/2
Des		15/16	225/256	5/6	25/32	3/4	45/64	2/3	5/8	75/128	9/16	135/256	1/2
D		128/135	8/9	5/6	64/81	20/27	32/45	2/3	256/405	16/27	5/9	8/15	1/2
Es		15/16	8/9	5/6	25/32	20/27	25/36	2/3	5/8	16/27	5/9	25/48	1/2
E		24/25	9/10	64/75	4/5	3/4	32/45	2/3	16/25	3/5	128/225	8/15	1/2
F		15/16	9/10	27/32	4/5	3/4	45/64	2/3	5/8	3/5	9/16	8/15	1/2
Fis		128/135	8/9	64/75	4/5	512/675	32/45	2/3	256/405	16/27	128/225	8/15	1024/2025
G		128/135	8/9	5/6	4/5	3/4	32/45	2/3	5/8	16/27	5/9	8/15	1/2
As		15/16	8/9	5/6	25/32	3/4	45/64	2/3	5/8	75/128	5/9	25/48	1/2
A		24/25	9/10	64/75	4/5	3/4	18/25	27/40	16/25	3/5	9/16	8/15	1/2
B		15/16	9/10	27/32	4/5	3/4	45/64	27/40	81/128	3/5	9/16	135/256	1/2
H		128/135	8/9	64/75	4/5	512/675	32/45	2/3	16/25	3/5	128/225	8/15	1/2

Tabelle 5

(1) HAASE, Rudolf
Grundlagen der Harmonikalen Symbolik
ORA e.V. Verlag München 1966

(2) MÜLLER, Hartmut
Physikalische Grundlagen der Musik
Bild d. kosm. Evolution Heft 3/69 S. 136

(3) SCHAUBERGER, Walter
Das Theozentrische Weltbild
Bild d. Kosmischen Evolution Heft 1/69 S. 25