Das Bildungsgesetz der hyperbolischen Spirale $\boldsymbol{r \cdot \varphi = 2\pi}$ - - die harmonische Folge

HERBERT PFAU

[Originaltext; 2003 ‚gescannt' aus „Bild der kosmischen Evolution";
1969; H. 3; S. 147-152. Leicht überarbeitet; u.a. Layout etwas geändert.]

Die Analyse dieser speziellen hyperbolischen Spirale zeigt das überraschende Ergebnis, daß ihr als fundamentaler Bauplan die harmonische Folge zugrunde liegt. Es ist das gleiche Gesetz, das in der Musik und Physik die Oberschwingungen beschreibt.

The Law of Formation for the Harmonically Quantized Hyperbolic Spiral: The Harmonic Series.
The analysis of this special hyperbolic Spiral shows the surprising result that its fundamental plan of construction is the harmonic series. It is the same law which describes the overtones in music and physics.

(Einfügung 2003: Die beschriebenen Zusammenhänge teilte Walter Schauberger dem Bearbeiter Norbert Harthun mündlich mit. Letzterer regte seinen ehemaligen Studenten Herbert Pfau zu dieser Ausarbeitung an)

Wir wollen uns einmal vorstellen, daß wir die Spiralbahn (Bild 1) schrittweise durchlaufen wollen. Dazu beginnen wir bei dem willkürlich gewählten Punkt P_1, zu dem der Startwinkel φ_1 und der Radius r_1 gehören. Dann machen wir immer gleich große Schritte zu P_2, P_3, P_4 usw. Diese Schritte können wir durch die dabei überstrichenen Winkeldifferenzen (Schrittweiten) Delta-Phi ($\Delta\varphi$) beschreiben.

Wir sehen, daß wir dem Mittelpunkt, dem Pol der Spirale, immer näher kommen, der Radius r nimmt von Schritt zu Schritt ab. Nun interessieren wir uns für die möglicherweise bestehende Gesetzmäßigkeit, mit der sich die Radien verkürzen. Dazu betrachten wir ein einfaches Beispiel:

Wir wollen bei einem Startwinkel φ_1 von 30° beginnen und auch um jeweils 30° weiterspringen (Schrittweite). Welche Werte ergeben sich für die Radien?

Die notwendige Gleichung ist bereits in der Überschrift angegeben. Wir wollen, um gleich im Gradmaß statt Bogenmaß rechnen können, für 2 π besser 360° einsetzen. Für den ersten Radius ergibt sich die Länge 360°/30° = 12, den zweiten: 360°/(30°+30°) = 6, den dritten: 360°/(30°+30° + 30°) = 4, den vierten: 360°/120° usw. Wir schreiben die Ergebnisse,

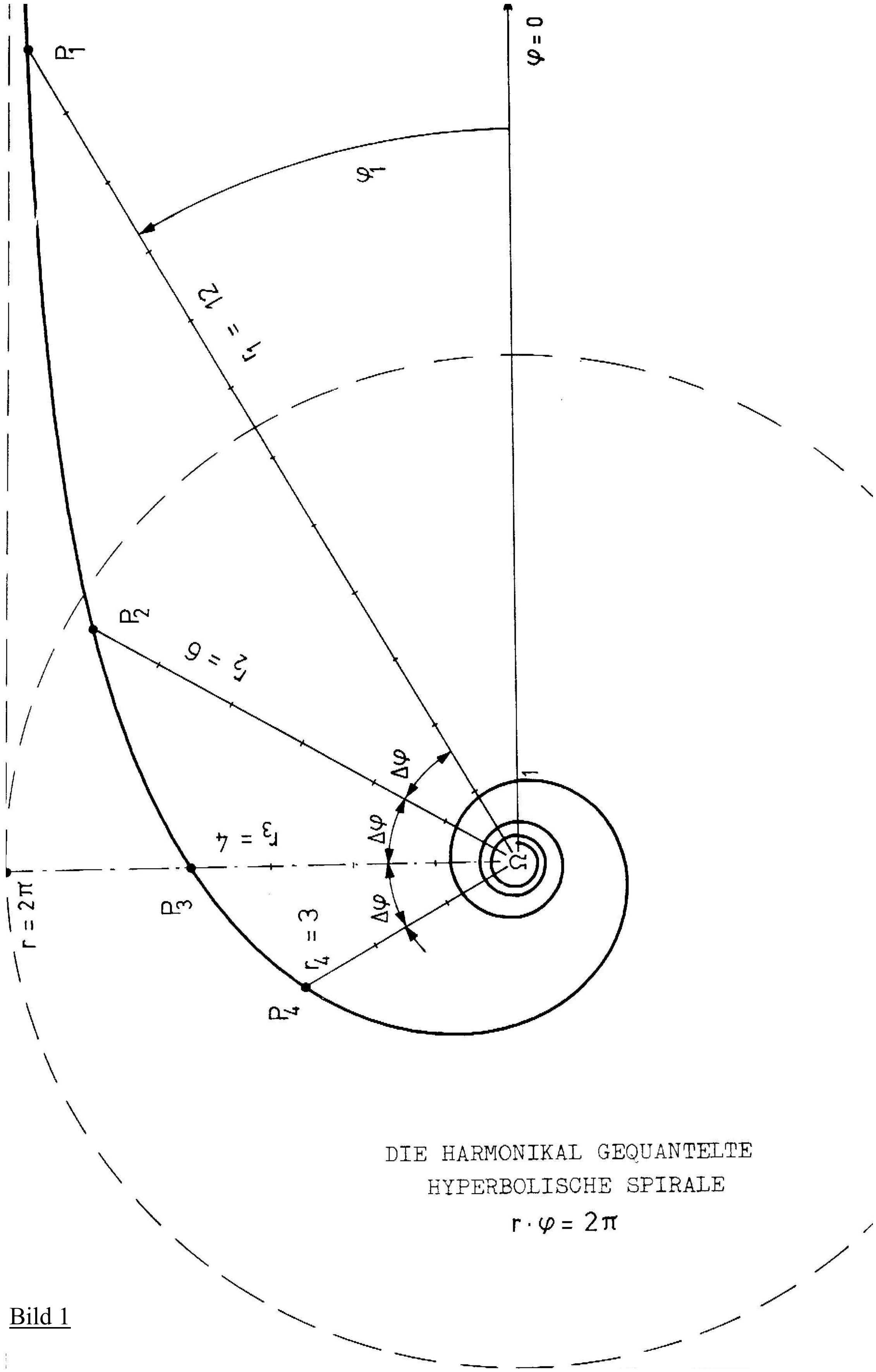

$\varphi = 0$
φ_1
P_1
$r_1 = 12$
P_2
$r_2 = 6$
$\Delta\varphi$
$\Delta\varphi$
$\Delta\varphi$
1
Ω
$r_3 = 4$
P_3
$r = 2\pi$
$r_4 = 3$
P_4
DIE HARMONIKAL GEQUANTELTE
HYPERBOLISCHE SPIRALE
$r \cdot \varphi = 2\pi$

Bild 1

das heißt, die Längen der Radien noch einmal hin:

$r_{1, 2, 3, 4...}$ = 12, 6, 4, 3...

Dann klammern wir 12 aus und erhalten:

$r_{1, 2, 3, 4...}$= 12 (1, 1/2, 1/3, 1/4...)

In der Klammer erkennt man jetzt die harmonische Folge. Der Wert vor der Klammer zeigt, bei welchem Radius, also von welcher Stelle der Spirale wir gestartet sind. Im Anhang sind die mathematischen Zusammenhänge genauer dargestellt.

(1) SCHAUBERGER, W.
Unveröffentlichte Manuskripte Biotechnische Akademie, Lauffen/Ober-Österreich
(2) BRONSTEIN-SEMENDJAJEW: Taschenbuch der Mathematik;
Verlag Harri Deutsch; Zürich und Frankfurt

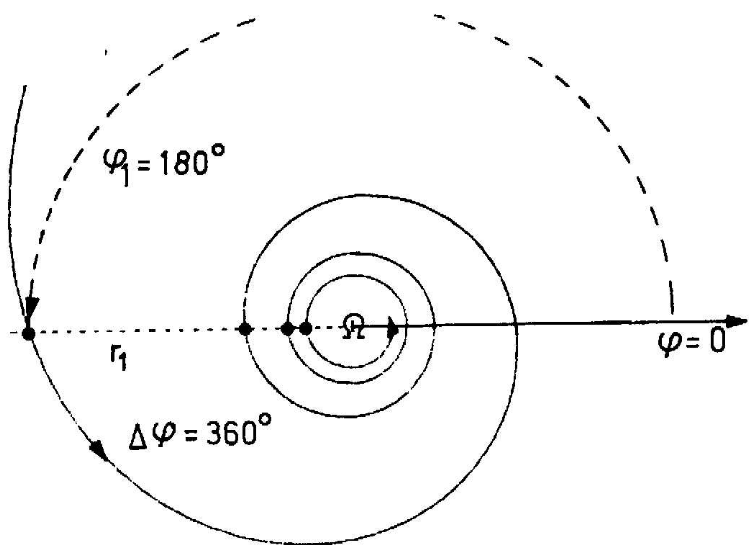
Anhang

Wir wollen drei mögliche Fälle untersuchen:

1) Zunächst wollen wir, ausgehend von einem willkürlichen Startwinkel φ_1 , die Spirale in großen Winkelschritten $\Delta\varphi$ durchlaufen. Es gelte

$$\Delta\varphi > \varphi_1 :$$

a) Die Schrittweite sei z.B. $\Delta\varphi = 360°$ und der Startwinkel $\varphi_1 = 180°$:



Wie man sieht, gelangt man beim Durchlaufen der Spirale mit den angegebenen Schritten nacheinander auf die markierten Punkte, die alle auf einem (hier waagerechten) Strahl liegen. Die jeweiligen Entfernungen zum Mittelpunkt ergeben eine Folge der Form:

$r_{1, 2, 3,...} = 2\ (1, 1/3, 1/5, 1/7,...)$

b) Die Schrittweite sei jetzt $\Delta\varphi = 360°$ und der Startwinkel $\varphi_1 = 90°$:

Diesmal ergibt sich die Folge:

$r_{1, 2,...} = 4\ (1, 1/5, 1/9, 1/13,...)$

Die Klammer zeigt in beiden Fällen (a und b) Bruchstücke der HARMONISCHEN FOLGE.

Allgemein kann man schreiben: $$r_n = \frac{2\pi}{\varphi_1}\left(\frac{1}{1 + m\Delta\varphi/\varphi_1}\right).$$

Oder in Winkelgraden ausgedrückt: $$r_n = \frac{360^\circ}{\varphi_1^\circ}\left(\frac{1}{1 + m\Delta\varphi^\circ/\varphi_1^\circ}\right)$$ mit m= 0,1,2,..

n = m + 1

(Es folgen im Vergleich zum Original von 1969 leicht korrigierte Angaben):

<u>Zwischen den einzelnen Gliedern</u> der Klammer fehlen jeweils einige Schritte. Ihre Anzahl beträgt $\Delta\varphi/\varphi_1 - 1$.

Allgemein gilt:

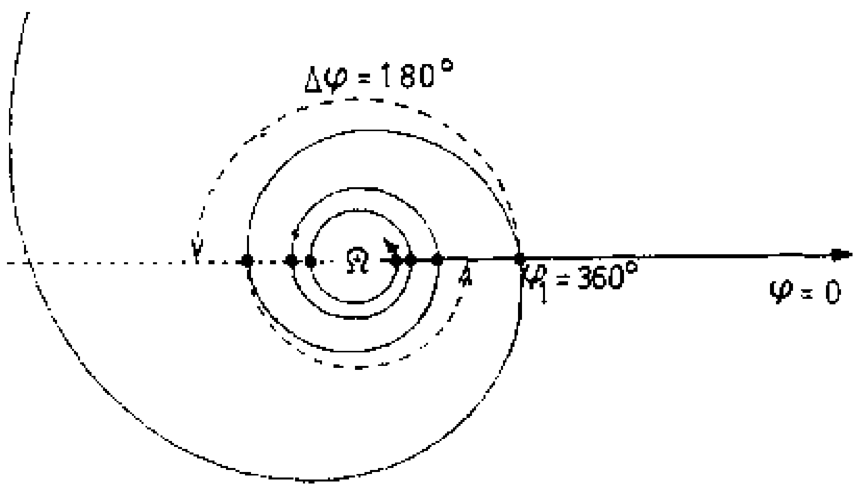
$\Delta\varphi > \varphi_1$: HARMONISCHE FOLGE mit periodisch <u>unterdrückten Teilschritten</u>.

Anzahl der fehlenden Schritte: $\Delta\varphi/\varphi_1 - 1$

2) Als zweiter Fall sei der Startwinkel φ_1 größer als die Schrittweite $\Delta\varphi$, es gelte also

$$\Delta\varphi < \varphi_1:$$

a) Das Beispiel sei jetzt: $\Delta\varphi = 180°$; $\varphi_1 = 360°$



Schreibt man jetzt die sich ergebenden Radien von Schritt zu Schritt hintereinander, so ergibt sich die Folge:

$r_{1, 2, 3,...}$= 2 (1, 1/3, 1/4, 1/5 1/6,...)

b) $\Delta\varphi = 90°$; $\varphi_1 = 360°$

$r_{1, 2, 3,...}$= 4 (1, 1/5, 1/6, 1/7 1/8,...)

In den Klammern sind jetzt ebenfalls Fragmente der HARMONISCHEN FOLGE enthalten; hinter dem ersten Glied fehlen immer Teilschritte, dem Wert $\Delta\varphi/\varphi_1$ -1 entsprechend.
Allgemein gilt:

$\Delta\varphi < \varphi_1$: HARMONISCHE FOLGE mit unterdrückten Anfangsschritten. Für die Anzahl der fehlenden Schritte hinter dem ersten Glied gilt wieder $\Delta\varphi/\varphi_1$ -1 .

3) Im Einführungsteil vorne haben wir schon den dritten, den interessantesten Fall vorweggenommen: $\Delta\varphi = \varphi_1$.

Da sich in diesem Falle innerhalb der Klammer immer die vollständige HARMONISCHE FOLGE zeigt, ist dieser Fall als Normalfall aufzufassen. Dies leuchtet besonders dann ein, wenn wir uns den Grenzfall $\Delta\varphi = \varphi_1 \rightarrow 0$ veranschaulichen. Lassen wir φ_1 und $\Delta\varphi$ gleichzeitig immer kleiner werden, so rücken die Punkte auf der Spiralbahn immer enger zusammen, und im Grenzfall $\Delta\varphi = \varphi_1 \rightarrow 0$ wird die vollständige Kurve durchlaufen - vom Anfang bis zum Ende. Das heißt also, daß die hyperbolische Spirale der vorliegenden Form vollständig auf der HARMONISCHEN FOLGE aufgebaut ist.

Weitere Beispiele:

$\Delta\varphi = \varphi_1 = 360°$ $r_{1, 2, 3,...}$ = 1 (1, 1/2, 1/3 , 1/4, 1/5,...)

$\Delta\varphi = \varphi_1 = 90°$ $r_{1, 2, 3,...}$ = 4 (1, 1/2, 1/3 , 1/4, 1/5,...)

$\Delta\varphi = \varphi_1 = 60°$ $r_{1, 2, 3,...}$ = 6 (1, 1/2, 1/3 , 1/4, 1/5,...)

$\Delta\varphi = \varphi_1 = 45°$ $r_{1, 2, 3,...}$ = 8 (1, 1/2, 1/3 , 1/4, 1/5,...)

Wir sehen, daß mit kleiner werdenden Startwinkeln und Schrittweiten ein immer größerer Teil der Kurve beschrieben wird! Die Radiusvektoren werden, bei großen Werten beginnend, immer kürzer. Im Grenzübergang beginnt der Radius mit „unendlich“ und endet in der Polstelle bei r = 0, wie leicht aus der Grenzwertbildung zu sehen ist:

$$\lim_{\varphi \to 0} r = \lim_{\varphi \to 0} \frac{2\pi}{\varphi} = \infty$$

$$\lim_{\varphi \to \infty} r = \lim_{\varphi \to \infty} \frac{2\pi}{\varphi} = 0$$

Anhand der Beispiele haben wir demonstriert, daß die hyperbolische Spirale jeden beliebigen Radiusvektor in Abschnitte teilt, deren Beträge in jedem Falle zur HARMONISCHEN FOLGE führen. Aus diesem Grunde nannte WALTER SCHAUBERGER diese hyperbolische Spirale ($r \cdot \varphi = 2\pi$) "harmonikal gequantelt".