Der Lehrsatz von Pythagoras - kläglicher Rest riesigen Wissens?

NORBERT HARTHUN

[Originaltext; 2003 ‚gescannt' aus „Bild der kosmischen Evolution"; 1969; H. 1; S. 31-36. Leicht überarbeitet; u.a. Layout etwas geändert.]

Nach einem Überblick über Pythagoras' Lehre von der Ordnung der Welt wird seine These, die Welt sei aus Proportionen aufgebaut, auf das Zahlensystem angewandt und führt zu einer hyperbolischen Spirale. Diese hyperbolische Spirale liefert die Möglichkeit, alle Zahlen als Summen von unendlichen Reihen darzustellen. Das allgemeine Glied ist für alle Reihen konstant!

Theorems of Pythagoras.
A general view of Pythagoras' doctrine, concerning the cosmic system, is given. Then, his theory that the world is based on proportions, is being applied to the numeric system; and this leads to a hyperbolic spiral. This hyperbolic spiral provides us with the capacity to represent all numbers as sums of indefinitely decrescent progressions. The general member is constant for all these progressions.

Dem Wesen nach kannte bereits Pythagoras (582 ? - 507 ? v. Chr. (1)) das Ordnungsprinzip des Universums, wie er auch selbst behauptete, nämlich das TONGESETZ. Pythagoras soll sich lange Zeit in Ägypten und Babylon aufgehalten haben. Er gründete (2) „einen nach strengen Regeln geordneten Bund, in dem jedes Mitglied sein gesamtes Vermögen einzubringen hatte". Er „lehrte die Existenz eines einzigen Gottes und die Unsterblichkeit der Seele durch Seelenwanderung". „Der Weg zur Erkenntnis (Gottes) ..." - ich lasse hier der Universalität wegen die Arbeitshypothese Gott wegfallen - der Weg zur Erkenntnis also . . . „aber war die Musik, deren Tonharmonien mathematisch geregelt sind. Wie Pythagoras erkannte, stehen die Saitenlängen miteinander harmonierender Töne in einfachen ganzzahligen Verhältnissen ... So wurden den Pythagoreern die ganzen Zahlen und ihre Verhältnisse zum Wesen aller Dinge und zu Grundbegriffen alles Seins, und das Studium der Mathematik war für sie der Weg zu göttlicher Reinheit und Unsterblichkeit . . . Die Lehre von der harmonischen, also mathematisch geregelten Ordnung der Welt hat seit dem Altertum größte Wirkung ausgeübt. „So sind die von Pythagoras entdeckten Harmonieregeln überhaupt die ersten mathematisch gefaßten naturwissenschaftlichen Gesetze."

Pythagoras hatte also „wie ein erleuchteter Prophet gepredigt, die ganze Natur, ja das ganze physische, metaphysische, geistige, moralische, mathematische Universum - kurz gesagt alles

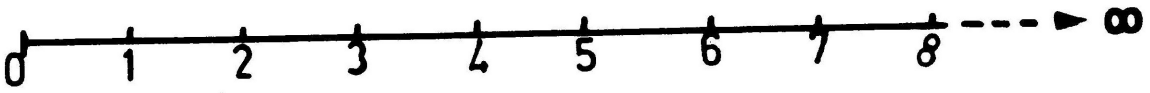

BILD 1

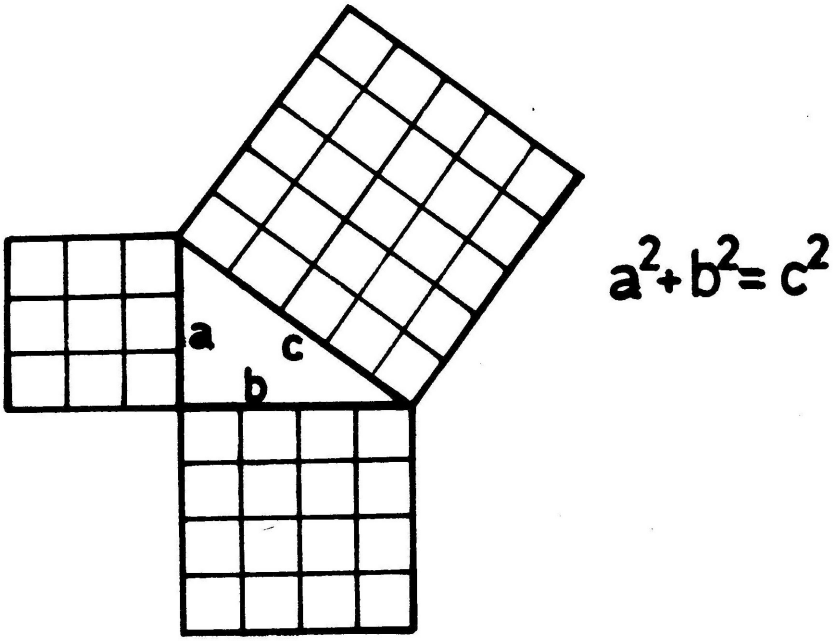

BILD 2

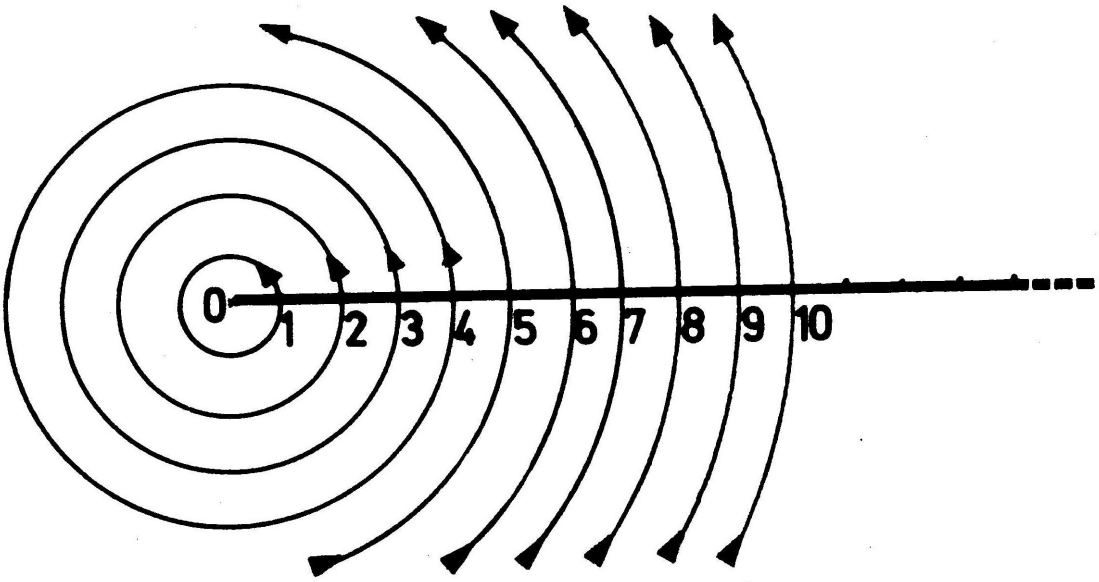

BILD 3

- sei auf dem diskontinuierlichen Modell der ganzen Zahlen l, 2, 3 usw. aufgebaut und nur mit den Begriffen dieser gottgegebenen Bausteine erklärbar ..." (2) Er mußte damals scheitern, weil er, soviel wir heute wissen, die Zahlengerade (Bild 1) als einziges Bild zur Interpretation seiner Lehre benutzte. Nach Pythagoras müßten alle Zahlen rational sein, das heißt durch ein Verhältnis zweier ganzer Zahlen darstellbar sein. Jedoch schon zu seiner Zeit paßte die unbestrittene Existenz der Zahl $\sqrt{2}$ (Diagonale eines Quadrates) nicht in diese einseitige Interpretation seiner Auffassung von der harmonischen Ordnung der Welt. Denn man kann sie nicht durch ein Verhältnis zweier ganzer Zahlen darstellen. Sie ist deswegen irrational. Ihr Wert läßt sich zu jeder erforderlichen Stellenzahl berechnen, jedoch wiederholen sich die Zahlen nie, noch enden sie. Der ihr entsprechende Punkt liegt irgendwo zwischen 1,41 und 1,42 auf der Zahlengeraden, und ist als Zahl schließlich auch vorhanden. Die Bewältigung dieser neuen Einsicht gelang Pythagoras nicht. Obwohl er es war, der doch selbst den Pythagoräischen Lehrsatz vom rechtwinkligen Dreieck aufstellte (Bild 2) und damit eigentlich die Möglichkeit hatte, die Tatsache der irrationalen Quadratwurzeln in seine Lehre einzubauen. Die Überlieferung über Pythagoras ist recht lückenhaft, außerdem hat er seine Geheimnisse schon zu Lebzeiten nur einem kleinen Kreis anvertraut; vielleicht ist uns deswegen heute nur noch der Sonderfall der linearen Zahlenskala rationaler Zahlen aus seinem Gesamtbild bekannt.

Um dieses Gesamtbild zu (re) konstruieren, besinnen wir uns zunächst auf seine lapidare Aussage, das Ordnungsprinzip des Universums sei durch Verhältnisse von ganzen Zahlen darstellbar. Gleichzeitig erschließen wir uns die ganze unendliche Ebene, wenn wir den unendlich langen Zahlenstrahl aus rationalen Zahlen, die unendlich dicht liegen, um den Nullpunkt rotieren lassen. (Bild 3) Um nun wieder zu einem faßbaren und daher aussagekräftigen Bild zu kommen, erinnern wir uns, daß also jeder Punkt auf dem Strahl pro Umdrehung den vollen Bogen 360° (2 π) beschreibt. Jede Zahl ist also auf einem und nur einem der unendlich dicht liegenden Kreise zu finden, sie ist damit mit ihrer Entfernung r vom Mittelpunkt gegeben. Es fehlt zur genauen Festlegung noch die Länge des Kreisbogens, wenn wir z.B. von der gezeichneten Nullage ausgehen. Zur Lösung halten wir uns weiter streng an Pythagoras' These: Die Welt besteht aus Verhältnissen ganzer Zahlen! Man bildet das Verhältnis zwischen dem vollen Bogen und jeder Zahl und erhält damit das Bogenstück der betreffenden Zahl. Damit findet man den Ort jeder Zahl mit r und Bogenlänge φ (heute Polarkoordinaten genannt). Das Ergebnis für alle Zahlen von 1/3 bis 6 zeigt Bild 4.

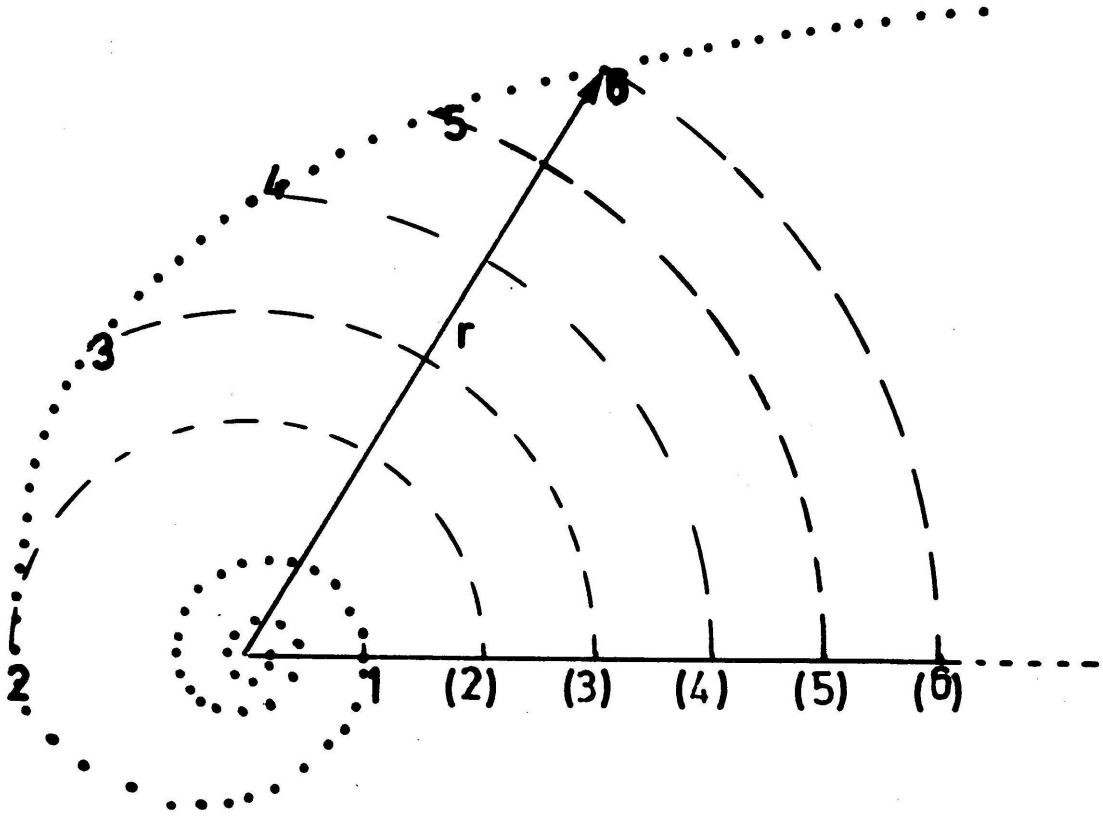

BILD 4

$$z=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{z^2}{z(mz+1)+(mz+1)^2}$$

z.B.

$$1=\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\frac{1}{20}+\cdots\cdots$$

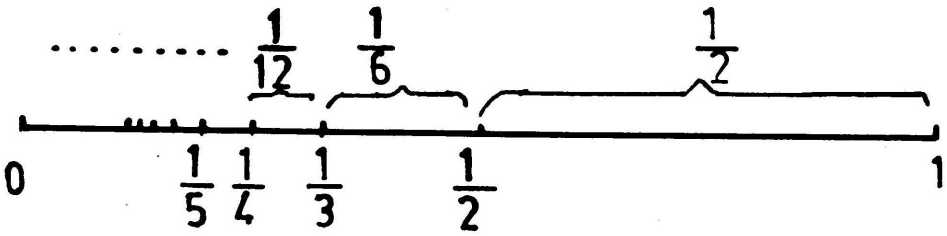

BILD 5

Nachdem wir uns diese interessante Figur erarbeitet haben - noch schnell eine Rückblende in die Zeit der ionischen Philosophen, zu denen Pythagoras zu rechnen ist. Betrachtet man die Kapitelle der Ionischen Säulen an den griechischen Tempeln, so scheint die Hypothese, daß Pythagoras diese Spirale, zumindest als geometrische Figur, bereits kannte, nicht all zu weit hergeholt. In den heutigen Mathematikbüchern ist sie als „Hyperbolische Spirale": $r \cdot \varphi = 2\pi =$ konstant (Polarkoordinaten) aufzufinden.

Jede Zahl unseres Zahlensystems, auch eine irrationale, liegt auf dieser Spirale und wird durch einen entsprechend langen Radius dargestellt (Bild 4). Deutlich ist einzusehen, daß jeder dieser Radien durch die Spiralwindungen in unendlich viele, verschiedene Teilstücke geteilt wird. Jede Zahl wird also durch die Summe einer unendlichen Anzahl von Teilstrecken geometrisch anschaulich repräsentiert. Berechnet man diese Teilstrecken, der Winkel φ ist für jede Zahl gegeben und vergrößert sich von Schritt zu Schritt um 2π, so erhält man das allgemeine Glied der unendlichen Reihe für die betreffende Zahl z :

$$z = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{z^2}{z(mz+1)+(mz+1)^2}$$

Es läßt sich zeigen, daß dieses allgemeine Glied für alle Zahlen gleich ist! Die Spiralfigur ist stetig, sie folgt einem einfachen Bildungsgesetz, und sie verkörpert in höchst anschaulicher Weise unsere gesamten Zahlen von NULL bis UNENDLICH. Gleichzeitig „liefert" sie EINE Urformel für alle diese Zahlen. Eine tatsächlich recht interessante Figur!

Wir haben in Bild 5 nicht ohne Absicht die geometrische Veranschaulichung der Zahl l gewählt. Bei der Zahl l hat die Spirale gerade einen vollen Umlauf (φ = 2π) vollendet (n = 1). Besinnen wir uns auf den Ausspruch von PYTHAGORAS: „Die Welt ist auf dem Gesetz der ganzen Zahlen aufgebaut“, so dürfte diesem Spiralpunkt wesentliche Bedeutung zukommen, denn hier ist ein erster voller Umlauf erreicht, während vorher nur halbe und Viertelumläufe „vollendet" waren. Wie als Bestätigung für die Wichtigkeit der weiteren jeweils vollen Umläufe erkennen wir auf dieser Zahlenstrecke die HARMONISCHE FOLGE!

Wahrscheinlich haben Sie es schon an den anderen Beiträgen dieses Heftes verspürt: Diese spezielle hyperbolische Spirale ist eine in jeder Hinsicht recht ergiebige Figur, sie ist im weitesten Sinne ein Stück des zu Anfang des Heftes angekündigten „roten Fadens".

Interpretieren wir Formel (1) etwas freier, so ist mit ihr der Nachweis gelungen, daß alle unsere Zahlen erst im „Unendlichen fertig" sind, also auf das Transzendente gestützt sind. Will man Probleme der Realität bewältigen, sollte man also mit unendlichen Reihen rechnen und konstruieren.

(1) The American Peoples Encyclopedia; Grolier Incorporated; New York

(2) STRUBECKER, K.: Geometrie in alter und neuer Zeit (I);
Bild der Wissenschaft 1967 Nr. 12; S. 1027 ff

(3) BELL, T.: Die großen Mathematiker; Econ-Verlag, Düsseldorf - Wien 1967, S. 29 ff